



16-osios jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“ teminės konferencijos  
**TRANSPORTO INŽINERIJA IR VADYBA**,  
vykusios 2013 m. gegužės 8 d. Vilniuje, straipsnių rinkinys

Proceedings of the 16th Conference for Junior Researchers 'Science – Future of Lithuania'  
**TRANSPORT ENGINEERING AND MANAGEMENT**, 8 May 2013, Vilnius, Lithuania

Сборник статей 16-й конференции молодых ученых «Наука – будущее Литвы»  
**ИНЖЕНЕРИЯ ТРАНСПОРТА И ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК**, 8 мая 2013 г., Вильнюс, Литва

## ПРОЧНОСТНОЙ РАСЧЕТ АЭРОДРОМНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ СЛАБЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЯХ

Александр Дубик<sup>1</sup>, Владимир Селенков, Светлана Талах<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный авиационный университет, Киев, Украина

<sup>2</sup>Черкасский государственный технологический университет, Черкассы, Украина  
Эл. почта: <sup>1</sup>saschadubik@ukr.net, <sup>2</sup>svetlanatalah@gmail.com

**Аннотация.** Предложена методика уточненных расчетов аэродромных жестких покрытий на основе численной реализации с помощью метода конечных элементов. Даются рекомендации по введению в существующие нормативные документы соответствующих переходных коэффициентов для определения расчетных погонных изгибающих моментов в бетонных плитах покрытия аэродромов в зависимости от прочности грунтового основания. Решена задача расчета реального двухслойного бетонного покрытия на жестком искусственном основании перрона терминального комплекса международного аэропорта «Львов».

**Ключевые слова:** жесткие аэродромные покрытия, грунтовое полупространство, численные прочностные исследования, метод конечных элементов.

В действующих нормативных документах фактически не учитывается взаимодействие плит конечных размеров жестких аэродромных покрытий, не учитывается функциональное изменение величины коэффициента постели грунтовых оснований. Современные численные методы позволяют ликвидировать этот недостаток, но надо задействовать всесторонний анализ напряженно-деформированного состояния гибких плит конечных размеров на упругом основании с использованием величины коэффициента постели как функции координат точек в плоскости контакта плиты покрытия и упругого основания, одновременно увеличивая эту плоскость в пределах расчетного фрагмента.

В предложенной методологии используется моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [1, 2]. На основе МСКЭ разработана численная методика исследования напряженно-деформированного состояния гибких тонких пластинок (плит) из прочных материалов – бетона, армобетона, фибробетона, железобетона, металлического проката и других композитных материалов – металожелезобетона, стально-

кордного резиноподобного материала, работающего совместно с линейно-упругим неоднородным основанием.

Расчет на прочность выполняется путем дискретного моделирования набора плит конечных размеров (по разрезной и неразрезной конструктивным схемам) на упругом основании с учетом односторонних связей. В данном подходе используется упрощенная математическая модель упругого основания с предположением пропорциональности между положительным прогибом пластинки и реакцией основания, а также учетом того, что коэффициент пропорциональности является величиной переменной и зависящей от координат точки срединной поверхности пластинки. Эта функция может быть аналитическим сплайном с использованием полиномиальных или тригонометрических функций, или двумерным сплайном с использованием коэффициентов соответствующей весовой матрицы для рассматриваемого участка инженерно-геологического разреза с учетом многослойного грунтового полупространства в основе покрытия и его толщины. При этом функция ко-

коэффициента постели определяется через эквивалентный общий модуль деформации грунта в данном сечении. Например, в случае наличия линзообразного грунтового слоя с известными предельными значениями коэффициентов постели эта функция будет иметь вид:

$$C_N(x^2, x^3) = C_o - (C_{\max} - C_o) \sin \frac{\pi x_N^2}{l^2} \sin \frac{\pi x_N^3}{l^3}, \quad (1)$$

где  $x_N^2, x_N^3$  – текущие местные координаты узловых точек расчетного фрагмента в глобальной системе координат;  $l^2, l^3$  – размеры расчетного фрагмента соответственно по  $z^2, z^3$  глобальной системы координат в плоскости  $OZ^2Z^3$ .

Полученные численные результаты расчета на прочность достаточно большого набора конкретных примеров конструкций жесткого покрытия с использованием различных дискретных моделей и типов грунтовых оснований свидетельствуют об универсальности предложенной методологии исследования напряженно деформированного состояния тонких плит на упругом неоднородном основании. Эта методология позволяет учитывать адекватность влияния сквозных швов и стыковых соединений плит на распределение внутренних усилий, неравномерность значений коэффициента постели упругого основания и влияние этой неравномерности на величину внутренних усилий, концентрацию нормальных и сдвиговых напряжений в плите, произвольную схему влияния колесной нагрузки для любого типа воздушных суден (ВС) и прочее.

В общем плане поставленная пространственная задача исследования гибких плит на упругом основании относится к классу геометрически нелинейных задач, одним из основных факторов которой является учет односторонних связей взаимодействия тонкой пластинки с грунтовым основанием. При расчетах гибких металложелезобетонных, металлических и композитных покрытий имеют место большие повороты, а в последнем случае, еще и большие перемещения.

Рассмотренная задача в общем плане для гибких оболочечных систем, при этом в качестве исходных соотношений метода конечных элементов (МКЭ) выступают соотношение нелинейной теории упругости и нелинейного программирования [1, 2]. Для конечно элементной дискретизации используется универсальный оболочечный конечный элемент (КЭ) с 24-ю степенями свободы относительно приростов обобщенных перемещений [2]. Аппроксимацию изо-

параметрического оболочечного пространственного КЭ с помощью лагранжевых условных координат  $S_i = \pm 1$  в пространстве КЭ –  $r_{(e)}$  для координат и обобщенных перемещений представлено в виде

$$Z^i(x_{(e)}^i) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \psi_{S_1 S_2 S_3}^{(e)} Z_{s_1 s_2 s_3}^i; \quad (2)$$

$$u^i(x_{(e)}^i) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \psi_{S_1 S_2 S_3}^{(e)} u_{s_1 s_2 s_3}^i; \quad (3)$$

$$\psi_{S_1 S_2 S_3}^{(e)} = \left( S_1 x_{(e)}^1 + \frac{1}{2} \right) \left( S_2 x_{(e)}^2 + \frac{1}{2} \right) \left( S_3 x_{(e)}^3 + \frac{1}{2} \right),$$

где  $\psi_{S_1 S_2 S_3}^{(e)} \equiv \psi_{n(n=1,8)}^{(e)}$  – функция формы универсального пространственного КЭ.

В качестве исходных данных МКЭ выступают вариационные уравнения в форме приростов [1, 2] с использованием первого выражения (для динамической задачи) принципа виртуальной работы [2]:

$$\int_V \left( \hat{\sigma}' + \hat{C}_4 \cdot \hat{\gamma} \right) \cdot \delta \hat{\gamma} dv + \int_V \rho \ddot{u} dv - \int_V \vec{\rho} \cdot \delta \vec{u} dv - \int_S \vec{q} \cdot \delta \vec{u} ds = 0, \quad (4)$$

где  $\hat{\sigma}'$  – второй тензор начальных напряжений Пиола–Кирхгоффа;  $\hat{\gamma}$  – тензор приростов конечных деформаций Коши–Грина;  $\vec{u}, \ddot{u}$  – векторы приростов перемещений и ускорений;  $\vec{\rho}, \vec{q}$  – обобщенные векторы объемных и поверхностных сил;  $\rho$  – плотность материала сплошной среды.

При формировании уравнений в приростах в рамках МСКЭ для функций перемещений, деформаций и напряжений построены тензорные ряды [2] с удержанием для функций деформаций и напряжений трех членов ряда Маклорена в приросте  $\vec{r}_{(e)}$ :

$$\hat{\gamma}_{(re)} = \vec{\gamma}_{(0)} + \nabla \hat{\gamma}|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \hat{\gamma}^T|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)}; \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_{(re)} = \hat{\sigma}_{(0)} + \nabla \hat{\sigma}|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \hat{\sigma}^T|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)}; \quad (6)$$

где  $\hat{\gamma}_{(0)}, \hat{\sigma}_{(0)}$  – тензоры деформаций и напряжений изотропного прироста;  $\nabla \hat{\sigma}|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)},$

$\frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \hat{\sigma}^T|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)}$  – тензоры поворотов и сдвигов.

Для дискретной КЭ–модели тонкой гибкой пластинки вариационное уравнение движения (4) с учетом (1), (2), (3), (5), (6) сводится к дифференциальному уравнению движения КЭ–модели гибкой пластинки на упругом основании:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + \{R(u)\} - \{Q(u)\} = \{Q_o(u)\}, \quad (7)$$

где  $[M], [C]$  – матрицы масс и вязкого демпфирования КЭ–модели;  $\{u\}, \{\dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$  – векторы приращений перемещений, скоростей и ускорений КЭ–модели;  $\{R(u)\}, \{Q(u)\}, \{Q_o(u)\}$  – матрицы обобщенных реакций внутренних и внешних сил КЭ–модели пластинки и обобщенных реакций упругого основания.

Применяя дифференциальное уравнение движения (7) с помощью метода установления по схеме вязкой релаксации [2] решена задача статики на основе неявной безусловно–устойчивой схемы интегрирования (7):

$$[C] \left\{ \dot{u}^{n+1} \right\} + \left\{ R(u^{n+1}) \right\} + \left\{ Q_o(u^{n+1}) \right\} - \left\{ Q(u^{n+1}) \right\} = 0, \quad (8)$$

где  $[C] = c[D]$ ;  $[D] = \text{diag}[K]$ ;  $[K]$  – линеаризована матрица жесткости КЭ–модели;  $c$  – коэффициент пропорциональности упругого основания.

На основе (8) с использованием аппроксимационных формул Ньютона – Канторовича получены рекуррентные формулы специального алгоритма неявного интегрирования дифференциального уравнения движения (7) на шаге  $n+1$  [3]:

$$\begin{aligned} & \left[ K_{(NL)}^{i'j'(n)} + c_{(N)}^{(n)} n_{(M)}^{(i')} n_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)} \right] \Delta \left\{ u_{i+1}^{j'(n+1)} \right\} = \\ & = \left\{ Q_{(N)}(u_i^{i'(n+1)}) \right\} - \left\{ R_{(N)}(u_i^{i'(n+1)}) \right\} - Q_{(N)}^{(0)}; \\ & \left\{ u_{i+1}^{i'(n+1)} \right\} = \left\{ u_i^{i'(n+1)} \right\} + \Delta \left\{ u_{i+1}^{i'(n+1)} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $n_{(N)}^{i'}$  – компоненты вектора единичной нормали в узлах КЭ–модели гибкой пластинки;  $c_{(N)}^{(n)}$  – приведенная функция коэффициента пропорциональности реакции упругого основания в узле  $N$ ;  $Q_{(o)}^{(N)}$  – компоненты векторов узловых реакций упругого основания;  $n$  – номер шага удлинения по параметру возмущения,  $i$  – номер итерации Ньютона–Канторовича в пределах  $n$ -го шага удлинения;  $K_{(NL)}^{i'j'(n)}$  – матрица жесткости КЭ–модели, обусловленная физико–механическими характеристиками материала пластинки;  $c_{(N)}^{(n)} n_{(M)}^{(i')} n_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)}$  – элементы диагональных коэффициентов матрицы жесткости КЭ–модели, обусловленные взаимодействием с линейно–упругим основанием.

Достоверность полученных результатов на основе уравнений (9) с использованием МСКЭ [1, 2] обоснована результатами многих тестовых и контрольных задач [3].

Для иллюстрации эффективности предложенной методологии рассматривается пример расчета на прочность жесткого бетонного покрытия перрона нового терминального комплекса МА «Львов» на стадии рабочего проектирования. Выполняются статические расчеты двухслойного жесткого бетонного покрытия на жестком искусственном и слабом грунтовом основаниях. Расчеты на прочность осуществляются путем дискретного моделирования набора плит конечных размеров  $7,5 \times 7,5$  м на упругом винклеровском основании. Коэффициенты пропорциональности (постели) полученные как интегрированные характеристики многослойной модели грунтового основания с использованием реального инженерно–геологического разреза на глубину до 7 м строительной площадки перрона терминального комплекса. Рассмотрено несколько примеров по продольным и поперечным сечениям, из которых выбрано сечение с самым слабым грунтовым основанием, для которого эквивалентный коэффициент постели по методике из [5] составляет  $k_{se} = 45,4$  МН/м<sup>3</sup>.

Окончательно согласованная конструкция бетонного покрытия представлена на рис. 1, на котором указаны физико–механические характеристики материалов всех слоев покрытия по нормативным документам [5, 6]. За расчетное ВС для определения колесной нагрузки принято самолет А380–800, при этом величина его расчетной нагрузки на колесо основной опоры  $F_d = 327,75$  кН; эквивалентный радиус колесного отпечатка –  $R_e = 0,264$  м при давлении в пневматиках шасси  $\rho_a = 1,5$  МПа.

На основе конструктивной схемы покрытия построено ее эквивалентный аналог (условная плита) при условии эквивалентности продольной и изгибающей жесткости реальной конструкции покрытия. Определены эквивалентные геометрические и физико–механические характеристики аналога [3]: эквивалентная толщина  $t_{(e)} = 74,0$  см; эквивалентный модуль упругости  $E_{(e)} = 3,39 \cdot 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>; эквивалентный коэффициент Пуассона  $\nu_{(e)} = 0,23$ ; эквивалентный объемный вес условной плиты  $\gamma_{cp}^{(e)} = 0,002858$  кгс/см<sup>3</sup>.

Верхний слой.	Цементобетон	15,30, 45
Нижний слой.	Тощий бетон	30, 45
Искусственное основание.	Грунтоцемент	15, 30, 45
Показатели для инженерного расчета по СНиП 2.05.08-85		
$R_{bb} = 3,73$ МПа (38 кг/см <sup>2</sup> ) $E_b = 3,53 \cdot 10^4$ МПа (3,6 · 10 <sup>5</sup> кг/см <sup>2</sup> )	Бетон В40/ $B_{bb}$ 4,4/55, $h = 45$ см	
$R_{bb} = 2,26$ МПа (23 кг/см <sup>2</sup> ) $E_b = 2,6 \cdot 10^4$ МПа (2,65 · 10 <sup>5</sup> кг/см <sup>2</sup> )	Бетон В15/ $B_{bb}$ 2,8/35, $h = 30$ см	
$R_{bb} = 0,6$ МПа (6,0 кг/см <sup>2</sup> ) $E_b = 1,5 \cdot 10^3$ МПа (1,5 · 10 <sup>4</sup> кг/см <sup>2</sup> )	Грунтоцемент М40, $h = 15$ см ГОСТ 23558-93	
Показатели для численного расчета по СНиП 2.03.01-84*		
$R_b = 22,0$ МПа (224 кг/см <sup>2</sup> ), $R_{bt} = 1,4$ МПа (14,3 кг/см <sup>2</sup> ) $E_b = 3,6 \cdot 10^4$ МПа (3,67 · 10 <sup>5</sup> кг/см <sup>2</sup> )	Бетон класса В40 для предельных состояний I группы, $h = 45$ см	
$R_b = 14,5$ МПа (148 кг/см <sup>2</sup> ), $R_{bt} = 1,05$ МПа (10,7 кг/см <sup>2</sup> ) $E_b = 3,0 \cdot 10^4$ МПа (3,06 · 10 <sup>5</sup> кг/см <sup>2</sup> )	Бетон класса В40 для предельных состояний I группы, $h = 45$ см	

Рис. 1. Конструкция аэродромного покрытия перрона

Параметры модели эквивалентного колесного отпечатка:

$$a = R_e \sqrt{\pi} = 26,4 \sqrt{\pi} = 46,8 \text{ см}, \quad (11)$$

С учетом (11), величины избыточного давления в пневматике и построенной дискретной модели (рис. 2), которая учитывающая симметрию вдоль оси фюзеляжа ВС включает 9-ть отдельных плит расчетного фрагмента, определены узловые значения нагрузок в модели колесного отпечатка, который состоит из 4-х КЭ: для центрального узла  $Q_1 = 8283,75$  кгс; для средних узлов на боковых гранях  $Q_2 = 4141,87$  кгс; для угловых узлов  $Q_3 = 2070,93$  кгс.

Для обеспечения адекватности взаимодействия плит в расчетном фрагменте и в реальной конструкции, то есть отсутствия связей на повороты  $\varphi_2, \varphi_3$  (относительно координатных осей глобальной системы координат  $OZ^1 Z^2 Z^3$ ) введено на стыках (продольных и поперечных) плит ребра-врезки (рис. 3). Модель стыка эквивалентной плиты построена из условия обеспечения разрезной схемы по эпюре моментов, т.е. на стыке обеспечен максимальный угол поворота сечения плиты без нарушения совместности деформаций на границе конечных элементов. Угол поворота устроен за счет полости на половину толщины плиты и снижения жесткости включения в плите на порядок или более по сравнению с расчетной жесткостью плиты.

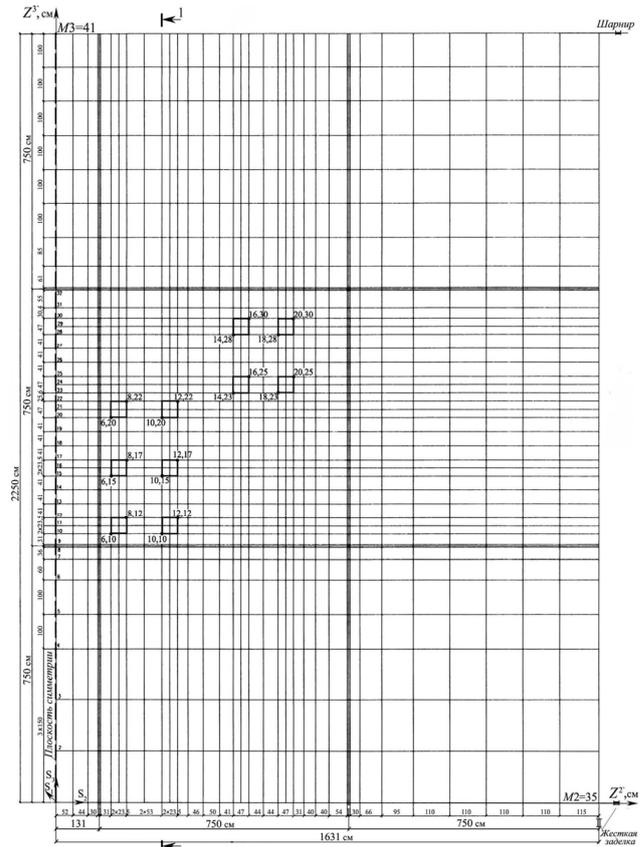


Рис. 2. Расчетная схема покрытия перрона при колесном воздействии шасси ВС А380-800

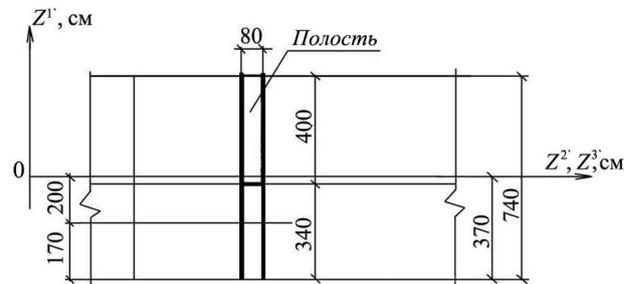


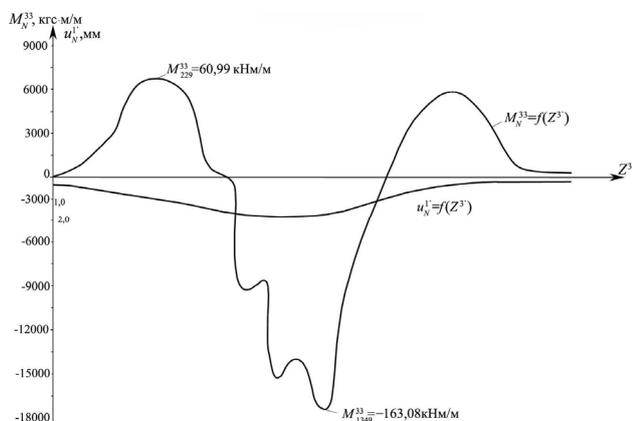
Рис. 3. Модель стыков плит конечных размеров

Результаты численного расчета жесткого аэродромного покрытия получены в двух вариантах: 1) с постоянным коэффициентом постели  $C \equiv k_{se} = 4,54$  кгс/см<sup>3</sup>, 2) с переменным коэффициентом постели в пределах расчетного фрагмента по формуле (1) (при наличии линзы слабого слоя грунта) с  $C \equiv k_{se} = 4,63$  кгс/см<sup>3</sup> и  $C_{min} = 2,63$  кгс/см<sup>3</sup>.

По сечению 1-1 (см. рис. 2) численного расчета построены эпюры узловых перемещений и погонных изгибающих моментов (рис. 4). По этим результатам получены данные для определения максимальных значений главных напряжений в условной плите и соответственно по формулам из [3] напряжений в

верхнем и нижнем слоях реальной конструкции покрытия:

$$\sigma_{1,\text{sup}} = k_{1,\text{sup}} \sigma_{\text{max}}^{(e)}; \quad \sigma_{1,\text{inf}} = k_{1,\text{inf}} \sigma_{\text{max}}^{(e)}.$$



**Рис. 4.** Эпюры узловых перемещений  $u_N'$  и погонных изгибающих моментов  $M_N^{33}$  в сечении 2 – 2

Анализ полученных численных результатов показывает, что значение максимального погонного изгибающего момента под левым верхним колесом основной опоры под фюзеляжем самолета А380–800 достигает величины  $M_{1349}^{33} = -163,08$  кНм/м, что соответствует напряжению в нижнем волокне условной плиты:  $\sigma_{1349}^{\text{max}} = 20,2$  кгс/см<sup>2</sup>.

$$\sigma_{1,\text{sup}} = 20,2 \cdot 1,254 = 25,33 \text{ кгс/см}^2,$$

$$\sigma_{1,\text{inf}} = 20,2 \cdot 0,63 = 12,73 \text{ кгс/см}^2.$$

Допустимые напряжения

$$|R_{bt}^{\text{sup}}| = 25,74 \text{ кг/см}^2,$$

$$|R_{bt}^{\text{inf}}| = 16,52 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{1,\text{sup}} < |R_{bt}^{\text{sup}}| \rightarrow 25,33 < 25,74,$$

$$\sigma_{1,\text{inf}} < |R_{bt}^{\text{inf}}| \rightarrow 12,73 < 16,52 \text{ кг/см}^2.$$

Выполненный комплексный расчет жесткого двухслойного покрытия на жестком искусственном основании, при наличии слабых слоев в грунтовой основе, на колесное воздействие шасси А380–800 свидетельствует, что предложенная конструкция бетонного покрытия соответствует требованиям прочности и надежности рассматриваемой конструкции покрытия.

По результатам расчетов реальной конструкции покрытия перрона терминального комплекса МА «Львов» в условиях наличия слабых слоев грунтов в

основании покрытия можно сделать вывод, что предложенная методология исследований жестких покрытий от воздействия колесной нагрузки сверхтяжелых воздушных судов является достаточно эффективной и достоверной, отвечает требованиям обеспечения надежной эксплуатации аэродромов современных аэропортов.

## Литература

1. Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. 2002. Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // *Прикладная механика*. –К.: Ин-т механики НАН Украины, Т. 38(48), №6, июль: 24 – 63.
2. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. 2005. *Теория и расчет сильнонелинейных конструкций*. – К.: Сталь. 432 с.
3. Цыхановский В.К., Козловец С.М., Коряк А.С. 2008. *Расчет тонких плит на упругом основании методом конечных элементов*. К.: Сталь. 234 с.
4. Корнев Б.Г., Черниговская Е.И. 1962. *Расчет плит на упругом основании*. М.: ГИЛСА и СМ. 355 с.
5. *СНиП 2.05.08–85 Аэродромы*. – М.: Госкомитет СССР по делам строительства, 1985. 58 с.
6. *СНиП 2.03.01–84\* Бетонные и железобетонные конструкции*. М.: Госстрой СССР, 1989. 77 с.